Distanz Punkt-Ebene im $\mathbb{R}^k$

Viktor Engelmann

Gegeben sei eine $k-1$-dimensionale Hyperebene in Hesse'scher Normalform $E = (x-p) \cdot n = 0$ und ein Punkt q. Bestimmt werden soll der Abstand d von q zu E. Dieser entspricht natürlich dem Abstand von q zu demjenigen Punkt q' der Ebene, der senkrecht unter q liegt.

> Dass jeder andere Punkt der Ebene einen größeren Abstand zu q hat ist leicht mit dem Satz des Pythagoras zu sehen (der auch im $\mathbb{R}^k$ gilt): wenn a der Abstand von q zu q' ist und b der Abstand von q' zu q'' (wobei q'' ein beliebiger Punkt auf der Ebene ist, der $\neq q'$ ist $\Rightarrow b > 0$), dann ist der Abstand von q'' zu q gleich $\sqrt{a^2+b^2}$, was aufgrund der Monotonie der Wurzel $> \sqrt{a^2} = a$ ist, weil $a^2+b^2 > a^2 \Leftarrow b > 0$

Um den Abstand von q zu E zu bestimmen, bestimmen wir also den Abstand von q zu q'. q' ist leicht zu finden, da wir den Normalenvektor n kennen, mit dem wir von q aus eine zu E senkrechte Gerade aufstellen können und nur ihren Schnittpunkt mit E bestimmen müssen:

$q' = q + kn$ für ein k und $(q'-p) \cdot n = 0$, also bestimme das k für das $(q+kn-p) \cdot n = 0$ gilt. Da $\mathbb{R}^k$ ein Prähilbertraum ist, gilt

$$(q+kn-p) \cdot n = qn + kn^2 - pn$$

also:

$$\begin{aligned} qn + kn^2 - pn &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{pn-qn}{n^2} \\ \Leftrightarrow k &= \frac{pn-qn}{|n|^2} \text{ weil } n^2 = |n|^2 \end{aligned}$$

Da $q' = q + kn$ ist, ist der Abstand von q zu q' gerade die Länge von kn, was in Prähilberträumen $= |k| \cdot |n|$ ist. Also ist

$$d = \left| \frac{pn-qn}{|n|^2} \right| \cdot |n|$$

Da $|n|^2 \geq 0$, wird der Bruch nur negiert, wenn der Zähler < 0 ist. Deshalb kann man den Betrag auch in den Zähler ziehen:

$$d = \frac{|(p-q)n|}{|n|^2} \cdot |n| = \frac{|(p-q)n|}{|n|}$$