Nullteilerfreiheit von Körpern

Viktor Engelmann

Behauptung: In jedem Körper gilt $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$
Beweis:

<u>„⇐“</u>: Sei $a \cdot 0 = x$. Zu zeigen: $x = 0$

$$\begin{array}{rrcl|l}
 & a \cdot 0 & = & x & +x \\
\Leftrightarrow & a \cdot 0 + x & = & x + x & x = a \cdot 0 \\
\Leftrightarrow & a \cdot 0 + a \cdot 0 & = & x + x & \text{Distributivität} \\
\Leftrightarrow & a \cdot (0 + 0) & = & x + x & \text{Neutralität der 0 bzgl. } + \\
\Leftrightarrow & a \cdot 0 & = & x + x & a \cdot 0 = x \\
\Leftrightarrow & x & = & x + x & \text{Existenz von } -x \\
\Leftrightarrow & 0 & = & x &
\end{array}$$

Fall $0 \cdot a = x$ wegen Kommutativität analog.

<u>„⇒“</u>: Sei $a \cdot b = 0$, aber $a \neq 0$. Zu zeigen: $b = 0$

$$\begin{array}{rrcl|l}
 & a \cdot b & = & 0 & \text{Existenz von } a^{-1} \text{ weil } a \neq 0 \\
\Leftrightarrow & b & = & a^{-1} \cdot 0 & \text{Siehe Beweis von } \Leftarrow \\
\Leftrightarrow & b & = & 0 &
\end{array}$$

Fall $a \cdot b = 0$, aber $b \neq 0$ wegen Kommutativität analog.

$\square$