Berechnung des Bildes einer linearen Abbildung

Viktor Engelmann

24. Oktober 2004

Sei $\varphi \in Hom(V,W)$. Man nehme eine Basis $\langle v_1, \cdots, v_k \rangle$ von $Kern_\varphi$, ergänze sie zu einer Basis des Ursprungsraums $V = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$ (d.h. $v_{k+1}, \cdots, v_n$ sind die ergänzten Vektoren).

Behauptung: Wendet man φ auf die ergänzten Vektoren an, erhält man eine Basis von $Bild_\varphi$

Beweis: Nach Dimensionssatz ist

$$\begin{aligned} dim(V) &= dim(Kern_\varphi) + dim(Bild_\varphi) \\ \Leftrightarrow n &= k + dim(Bild_\varphi) \\ \Leftrightarrow n - k &= dim(Bild_\varphi) \end{aligned}$$

also sind $n-k$ linear unabhängige Vektoren aus $Bild_\varphi$ eine Basis von $Bild_\varphi$

Für alle $v \in V$ ist trivialerweise $\varphi(v) \in Bild_\varphi$. daher sind $\varphi(v_{k+1}), \cdots, \varphi(v_n)$ genau $n-k$ Vektoren aus $Bild_\varphi$, also eine Basis von $Bild_\varphi$, sofern sie linear unabhängig sind.

Angenommen $\varphi(v_{k+1}), \cdots, \varphi(v_n)$ wären linear abhängig, dann existiert ein $v_i \in \{v_{k+1} \cdots v_n\}$ mit

$$\begin{aligned} \varphi(v_i) &= a_{k+1}\varphi(v_{k+1}) + \cdots + a_{i-1}\varphi(v_{i-1}) + a_{i+1}\varphi(v_{i+1}) + \cdots + a_n\varphi(v_n) \\ \Leftrightarrow \varphi(v_i) &= \varphi(a_{k+1}v_{k+1}) + \cdots + \varphi(a_{i-1}v_{i-1}) + \varphi(a_{i+1}v_{i+1}) + \cdots + \varphi(a_n v_n) \\ \Leftrightarrow 0 &= \varphi(a_{k+1}v_{k+1}) + \cdots + \varphi(a_{i-1}v_{i-1}) - \varphi(v_i) + \varphi(a_{i+1}v_{i+1}) + \cdots + \varphi(a_n v_n) \\ \Leftrightarrow 0 &= \varphi(a_{k+1}v_{k+1} + \cdots + a_{i-1}v_{i-1} - v_i + a_{i+1}v_{i+1} + \cdots + a_n v_n) \end{aligned}$$

also ist nach Definition des Kerns

$$a_{k+1}v_{k+1} + \cdots + a_{i-1}v_{i-1} - v_i + a_{i+1}v_{i+1} + \cdots + a_n v_n \in Kern_\varphi$$

Es war aber $Kern_\varphi = \langle v_1, \cdots, v_k \rangle$ also existieren $a_1, \cdots, a_k$ sodass

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k &= a_{k+1}v_{k+1} + \cdots a_{i-1}v_{i-1} - v_i + a_{i+1}v_{i+1} + \cdots + a_n v_n \\ \Leftrightarrow 0 &= -a_1 v_1 - \cdots - a_k v_k + a_{k+1}v_{k+1} + \cdots a_{i-1}v_{i-1} - v_i + a_{i+1}v_{i+1} + \cdots + a_n v_n \end{aligned}$$

ist, womit $v_1, \cdots, v_n$ linear abhängig sind, aber $v_1, \cdots, v_n$ war nach Voraussetzung eine Basis von V und damit linear unabhängig.

$\lightning$